

УДК 517.9

Учет запаздывания в цепочке связи между осцилляторами

Глызин С. Д., Киселева Е. О.¹

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru, katerinakiseleva@mail.ru

получена 22 апреля 2010

Ключевые слова: автоколебания, запаздывание, нормальная форма, ляпуновские показатели, бифуркации, синхронизация

Изучается динамика слабого диффузионного взаимодействия пары близких осцилляторов, возникающих при моделировании нервных клеток. В цепи связи между осцилляторами учтено запаздывание прохождения импульса. Для значений параметров задачи, близких к критическим, строится нормальная форма для амплитудных и фазовых переменных. Анализируются фазовые перестройки нормальной формы при изменении параметров, характеризующих функцию связи осцилляторов. Показано, что, несмотря на слабость взаимодействия, введение запаздывания приводит к существенным изменениям в сценарии фазовых перестроек.

1. Постановка задачи. Для моделирования нейронной активности в [1,2] было предложено использовать следующее дифференциальное уравнение с запаздыванием, учитывающее свойства биологических клеток мозга:

$$\dot{u} = \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u) + f_{\text{K}}(u(t-1))]u. \quad (1)$$

Здесь $u(t)$ — мембранный потенциал нейрона, функции

$$f_{\text{Na}}(u) = r_1 \exp(-u^2) \quad \text{и} \quad f_{\text{K}}(u(t-1)) = r_2 \exp(-u^2(t-1)) \quad (2)$$

характеризуют проводимости натриевых и калиевых каналов клетки соответственно, время пронормировано так, что запаздывание калиевого тока равно единице.

Рассмотрим модель двух нейронов вида (1) в случае, когда в цепочке связи между ними имеется некоторое запаздывание. С биологической точки зрения это явление имеет следующий смысл: нейрон, представляющий собой распределенное образование, изменяет мембранный потенциал и порождает в своем теле (соне) импульс,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (государственный контракт №02.740.11.0197).

который начинает с конечной скоростью распространяться по аксону. Так как аксон является достаточно протяженным, а передача импульса обусловлена рядом дополнительных условий (например, перехватами Ранвье), то нервный импульс достигает синапса лишь спустя некоторое время h , вызывая увеличение или уменьшение ионной проводимости пресинаптического нервного окончания, тем самым влияя на мембранный потенциал другого нейрона. Для моделирования этой ситуации естественно в изученную в [3] систему добавить запаздывание в элемент, моделирующий связь между нейронами, то есть рассмотреть систему

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u_1) + f_K(u_1(t-1))]u_1 + D(u_2(t-h) - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \lambda [-1 - f_{\text{Na}}(u_2) + f_K(u_2(t-1))]u_2 + D(u_1(t-h) - u_2),\end{aligned}\quad (3)$$

где $0 < h < 1$ — величина запаздывания. Отметим, что система (3) при $h = 0$ сводится к задаче, рассмотренной в [3]. Всюду далее будем считать, что связь между осцилляторами мала $D = \varepsilon d$, $0 < \varepsilon \ll 1$, поскольку хотя ионный обмен и носит постоянный характер, но он лишь незначительно влияет на изменение мембранного потенциала.

2. Локальный анализ нормальной формы. Пусть величины r_1, r_2 фиксированы и выполнено соотношение $r_2 - r_1 > 1$, тогда уравнение (1) при условии (2) имеет ненулевое состояние равновесия

$$u = u_* = \sqrt{\ln(r_2 - r_1)}, \quad (4)$$

устойчивость которого определяется характеристическим квазимногочленом

$$P(\mu) = \mu - \frac{2\lambda u_*^2(r_1 - r_2 \exp(-\mu))}{(r_2 - r_1)}. \quad (5)$$

Предположим также, что параметр λ близок к критическому значению $\lambda_{\text{кр}}$, задаваемому формулой

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{\omega_0(r_2 - r_1)}{2r_2 u_*^2 \sin \omega_0}, \quad \text{где } \omega_0 = \arccos(r_1/r_2), \quad (6)$$

то есть рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= (\lambda_{\text{кр}} + \varepsilon) [-1 - r_1 \exp(-(u_1 + u_*)^2) + \\ &\quad + r_2 \exp(-(u_1(t-1) + u_*)^2)](u_1 + u_*) + \varepsilon d(u_2(t-h) - u_1), \\ \dot{u}_2 &= (\lambda_{\text{кр}} + \varepsilon) [-1 - r_1 \exp(-(u_2 + u_*)^2) + \\ &\quad + r_2 \exp(-(u_2(t-1) + u_*)^2)](u_2 + u_*) + \varepsilon d(u_1(t-h) - u_2),\end{aligned}\quad (7)$$

где u_* по-прежнему ненулевое состояние равновесия (4).

Поскольку $h < 1$, то фазовым пространством решений системы (7), как и при $h = 0$, остается $C[-1, 0] \times C[-1, 0]$. В силу слабости связи между осцилляторами для данной системы может быть выполнена та же стандартная подстановка метода нормальных форм, что и в случае $h = 0$

$$\begin{aligned}(u_1(t, s), u_2(t, s))^T &= \sqrt{\varepsilon}(z_1(s)\mathbf{e}_1 e^{i\omega_0 t} + z_2(s)\mathbf{e}_2 e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}) + \\ &\quad + \varepsilon w_1(t, s) + \varepsilon^{3/2} w_2(t, s) + \dots\end{aligned}\quad (8)$$

Действуя, как и в [3], получим нормальную форму

$$\begin{aligned} z_1' &= \varphi_0 z_1 + (d_0 + ic_0)|z_1|^2 z_1 + d(z_2 \exp(i\omega_0 h) - z_1)/P'(i\omega_0), \\ z_2' &= \varphi_0 z_2 + (d_0 + ic_0)|z_2|^2 z_2 + d(z_1 \exp(i\omega_0 h) - z_2)/P'(i\omega_0), \end{aligned} \quad (9)$$

в которой $z_j' = \frac{dz_j}{ds}$, $j = 1, 2$, а формулы для коэффициентов имеют вид

$$\varphi_0 = \frac{i\omega_0}{\lambda_{\text{кр}} P'(i\omega_0)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} d_0 + ic_0 &= \frac{1}{P'(i\omega_0)} \left[\frac{i\omega_0}{u_*} \left(2(1 - u_*^2)v_0 + 2(u_* - v_1)u_*^2 - 3u_* \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{\text{кр}}}{(r_2 - r_1)} \left(r_1(2u_*(v_0 + v_1) - 3(2u_*^2 - 1)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r_2((2u_*^2 - 1)(2 + \exp(-2i\omega_0)) - 2u_*(v_0 + v_1 \exp(-2i\omega_0))) \right) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$P'(i\omega_0) = 1 - \frac{2\lambda_{\text{кр}} u_*^2 r_2 \exp(-i\omega_0)}{(r_2 - r_1)}. \quad (12)$$

Формулы (10), (11) совпадают с аналогичными формулами, полученными в [3] для случая $h = 0$, и нормальная форма (9) отличается от полученной ранее лишь множителем $\exp(i\omega_0 h)$ в слагаемых, отвечающих за связь между осцилляторами. Нетрудно видеть, что выполнена следующая теорема о соответствии режимов нормальной формы (9) режимам исходной системы (7).

Теорема 1. *Предположим, что система (9) имеет некоторый экспоненциально орбитально устойчивый цикл (тор). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ исходная система (7) имеет цикл (двумерный инвариантный тор) той же устойчивости с асимптотикой (8).*

Для дальнейшего анализа системы (9) выполним полярную замену $z_j(s) = \xi_j(s) \exp(i\varphi_j(s))$, $\xi_j(s) > 0$, $j = 1, 2$, и перейдем к системе

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \gamma \xi_1 + d_0 \xi_1^3 + k(\xi_2 \cos(\alpha - \omega_0 h + \delta) - \xi_1 \cos \delta), \\ \xi_2' &= \gamma \xi_2 + d_0 \xi_2^3 + k(\xi_1 \cos(\alpha + \omega_0 h - \delta) - \xi_2 \cos \delta), \\ \alpha' &= -k \left[\frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha - \omega_0 h + \delta) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha + \omega_0 h - \delta) \right] + c_0(\xi_2^2 - \xi_1^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$, а остальные параметры определяются формулами

$$\begin{aligned} \gamma &= \operatorname{Re} \varphi_0, \quad k \exp(i\delta) = \frac{d}{P'(i\omega_0)}, \\ \varphi_1' &= \operatorname{Im} \varphi_0 + c_0 \xi_1^2 + k \left[\frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \delta) - \sin \delta \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее заменим время $\gamma s \rightarrow s$ и обозначим $\xi_j = \sqrt{-\gamma/d_0} \eta_j$ (замена является корректной, поскольку $\gamma > 0$ при $r_2 - r_1 > 1$), а также

$$\varkappa = k/\gamma, \quad b = c_0/d_0, \quad \delta^* = \delta - \omega_0 h, \quad (15)$$

после чего система (13) примет вид

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= \varkappa \eta_2 \cos(\alpha + \delta^*) + (1 - \varkappa \cos \delta - \eta_1^2) \eta_1, \\ \eta'_2 &= \varkappa \eta_1 \cos(\alpha - \delta^*) + (1 - \varkappa \cos \delta - \eta_2^2) \eta_2, \\ \alpha' &= -\varkappa \left[\frac{\eta_2}{\eta_1} \sin(\alpha + \delta^*) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\alpha - \delta^*) \right] + b(\eta_1^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что система (16) отличается от полученной в [3] нормальной формы, так как в соответствующих слагаемых употребляется как δ^* , так и δ . Найдем замены, приводящие систему (16) к изученному ранее виду. Для этого переобозначим $\eta_j \rightarrow \sqrt{1 - \varkappa(\cos \delta - \cos \delta^*)} \eta_j$, $j = 1, 2$, и заменим время $(1 - \varkappa(\cos \delta - \cos \delta^*))s \rightarrow s$. Замены корректны лишь в случае

$$1 - \varkappa(\cos \delta - \cos \delta^*) > 0. \quad (17)$$

В итоге получим систему

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= k \eta_2 \cos(\alpha + \delta^*) + (1 - k \cos \delta^* - \eta_1^2) \eta_1, \\ \eta'_2 &= k \eta_1 \cos(\alpha - \delta^*) + (1 - k \cos \delta^* - \eta_2^2) \eta_2, \\ \alpha' &= -k \left[\frac{\eta_2}{\eta_1} \sin(\alpha + \delta^*) + \frac{\eta_1}{\eta_2} \sin(\alpha - \delta^*) \right] + b(\eta_1^2 - \eta_2^2), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$k = \frac{\varkappa}{1 - \varkappa(\cos \delta - \cos \delta^*)}. \quad (19)$$

Отметим, что величина $k > 0$ при выполнении неравенства (17) и $\varkappa > 0$.

Сформулируем два полезных предельных соотношения для функций $b(r_1, r_2)$ и $\delta(r_1, r_2)$ при $r_2 \in (r_1 + 1, \infty)$, стремящемся к левой или правой границам интервала изменения.

Лемма 1. Пусть r_1 фиксировано и $r_2 \rightarrow \infty$. Тогда для системы (18)

$$\omega_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \delta^* \rightarrow -\operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2}, \quad b \rightarrow \frac{\pi + 6}{3\pi - 2}. \quad (20)$$

Лемма 2. Пусть r_1 фиксировано и $r_2 \rightarrow r_1 + 1 + 0$. Тогда для системы (18)

$$\begin{aligned} \omega_0 \rightarrow \omega_0^* &= \arccos \frac{r_1}{r_1 + 1}, \quad \delta^* \rightarrow \delta_0^* = -\operatorname{arctg} \frac{\omega_0^*}{1 - \omega_0^* \operatorname{ctg} \omega_0^*} - \omega_0^* h, \\ b \rightarrow b^* &= \frac{\sqrt{1 + 2r_1(3 + 5r_1)} + (1 + r_1)^2 \omega_0^*}{3(1 + r_1)^2 \omega_0^* \sqrt{1 + 2r_1} - 6r_1^2 - 5r_1 - 1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что значения параметров в формулах (20) не зависят от r_1 , а зависимость от h имеет лишь величина δ^* .

В статье [4] было определено разбиение плоскости параметров b и δ^* на области с различными сценариями фазовых перестроек (см. рис. 1, на котором представлена плоскость параметров b и δ^* , разбитая на области с различными сценариями фазовых перестроек). Опишем кривые на рисунке 1. Кривая под номером один представляет собой график зависимости $b = -\operatorname{ctg}\delta^*$, для значений b и δ^* ниже этой кривой состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$ устойчиво при любом положительном k . Кривые под номерами два и три разбивают плоскость параметров таким образом, что для значений b и δ^* между кривыми два и три система (16) имеет при $k > k_{\text{кр}}$ неоднородные состояния равновесия A, B, C, D , а для других областей таких докритических состояний нет. На кривой, отмеченной числом четыре, лежат значения параметров, при которых равна нулю вещественная часть ляпуновской величины, вычисленной для неоднородного состояния равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ в критической точке потери устойчивости ($k = k_{\pi,2}$), это означает, что при значениях b и δ^* выше этой кривой при увеличении k рождается устойчивый цикл, а ниже нее в состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ стягивается неустойчивый цикл. Кривая под номером пять представляет собой функцию $b = -\operatorname{ctg}2\delta^*$, для значений b и δ^* выше этого графика состояние равновесия $(\xi^*, \xi^*, \pi)^T$ теряет устойчивость колебательным образом. Кривая шесть соответствует равенству нулю вещественной части ляпуновской величины, вычисленной для симметричных состояний равновесия A и B , поэтому для значений b и δ^* ниже этой кривой состояния A и B мягко теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B , а выше этой кривой в состояния A и B стягиваются неустойчивые циклы и потеря устойчивости происходит жестко.

Для определения фазовых перестроек, которые могут наблюдаться в системе (18), на рисунок 1 добавлены кривые 7 – 9, соответствующие зависимостям $b(\delta^*)$ при фиксированном значении $r_1 = 1.5$ (r_2 при этом изменяется от $r_1 + 1 + 0$ до ∞) и различных значениях запаздывания h ($h = 0$, $h = 0.1$, $h = 0.25$ соответственно). Из леммы 2 следует, что графики всех зависимостей b от δ^* начинаются в точках, определяемых равенствами (21), а заканчиваются в соответствии с леммой 1 в точках $\delta^* = -\arctg \pi/2 - \pi h/2$, $b = (\pi + 6)/(3\pi - 2)$.

Введение запаздывания h в цепь связи между осцилляторами приводит к изменениям бифуркационного сценария системы по сравнению со случаем $h = 0$. При увеличении h точка, соответствующая фиксированным значениям параметров r_1 , r_2 , может переходить из области с одним сценарием фазовых перестроек в область с другим сценарием. В частности, на рисунке 1 точками на кривых 7 – 9 обозначены значения (b, δ^*) , соответствующие $r_1 = 1.5$, $r_2 = 3$ в случае разных запаздываний. Легко видеть, что при увеличении h точка переходит из области ниже кривой 3, где у системы (18) наблюдаются устойчивые докритические режимы, в область выше кривой под номером 3, где подобных режимов нет. Треугольниками на кривых 7 – 9 отмечены точки (b, δ^*) , полученные для значений параметров $r_1 = 1.5$, $r_2 = 15$, которые также переходят из одной области сценариев фазовых перестроек в другую. Таким образом, при $r_1 = 1.5$ на каждой кривой, соответствующей различным значениям h , существуют две области значений параметров b , δ^* , для которых увеличение запаздывания приводит к изменению сценария бифуркаций системы (18).

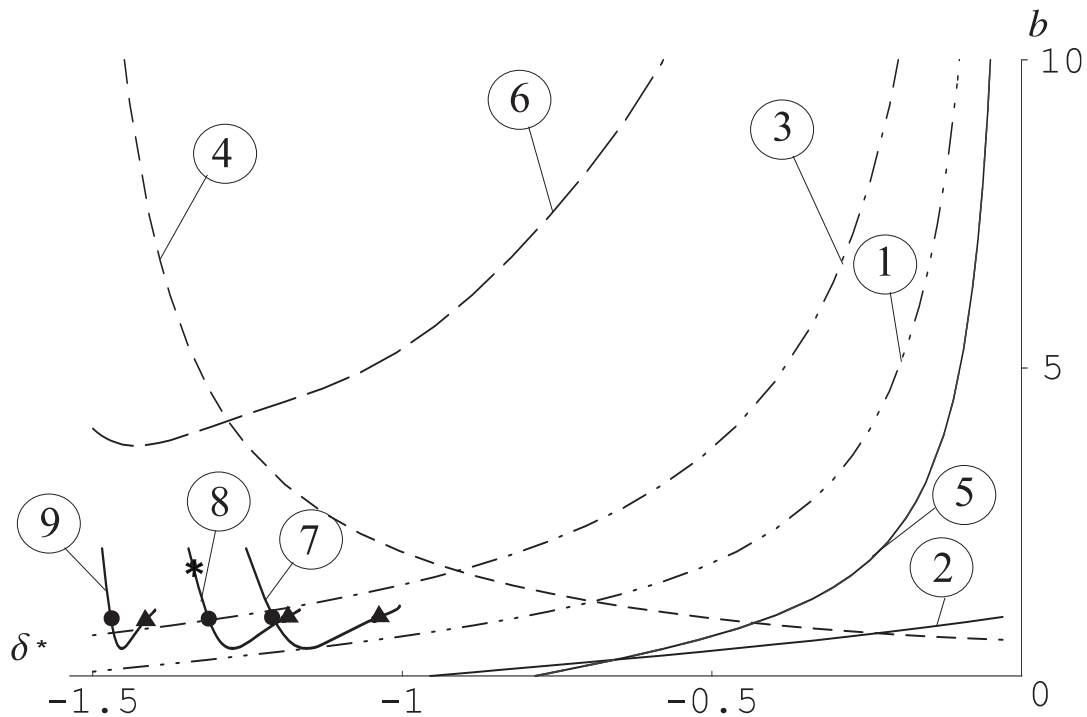


Рис. 1.

Проделанный локальный анализ показывает, что для некоторых областей значений параметров за счет изменения запаздывания в элементе связи системы (3) можно добиться такой ситуации, в которой оказывается невозможным сосуществование однородного цикла с другими устойчивыми режимами. Тем самым, учет запаздывания в цепи связи позволяет получить механизм вывода системы из состояния мультистабильности, связанной с сосуществованием нескольких устойчивых режимов.

Рассмотрим подробнее фазовые перестройки системы (18), зафиксировав для определенности $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.6$ и $h = 0.1$. Отметим, что при $h = 0$ этот случай уже был рассмотрен в [3], где была показана возможность существования сложных режимов, характеризующихся сочетанием колебаний большого и малого масштаба. В случае запаздывания $h = 0.1$ коэффициенты нормальной формы, вычисленные по формулам (11), (12), (14), (15) оказываются равными $\delta^*(1.5, 2.6, 0.1) \approx -1.33875$, $b(1.5, 2.6, 0.1) \approx 1.80499$, на рисунке 1 им соответствует звезда на кривой номер восемь. Последовательность бифуркаций нормальной формы (18) при изменении параметра k в этом случае имеет вид:

1. При $k > k_{\pi 1} = 1/(2\cos\delta^*) \approx 2.17421$ глобально устойчиво единственное состояние равновесия $(1, 1, 0)^T$.
2. При $k < k_{\pi 1}$ к глобально устойчивому состоянию равновесия $(1, 1, 0)^T$ добавляется неустойчивое $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$, где $\eta^* = \sqrt{1 - 2k\cos\delta^*}$.
3. При $k = k_{кр} = -\cos\delta^* + b\sqrt{1 - \cos^2\delta^*} \approx 1.52664$ от однородного состояния рав-

новесия ответвляется пара симметричных устойчивых состояний равновесия A и B , наследующих его устойчивость.

4. При $k = k_{\pi 2} = 1/(4\cos\delta^*) \approx 1.08711$ от неустойчивого состояния равновесия (η^*, η^*, π) ответвляется неустойчивый цикл C_π .
5. При $k = k_C \approx 1.07945$ симметричные устойчивые состояния равновесия A и B мягко теряют устойчивость с рождением устойчивых циклов C_A и C_B .
6. При дальнейшем уменьшении параметра k устойчивые циклы C_A и C_B увеличиваются в размерах, пока при $k = k_S \approx 0.95693$ не сомкнутся в точке $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $\alpha = 0$, объединяясь в один цикл C_U , который остается устойчивым вплоть до $k = k_{\pi 3}$.
7. При $k = k_{\pi 3} \approx 0.80474$ неустойчивый цикл C_π сливается с устойчивым циклом C_U и исчезает.
8. Наконец, при $0 < k < k_{\pi 3}$ система (18) имеет единственное, глобально устойчивое состояние равновесия $(\eta^*, \eta^*, \pi)^T$.

Приведенные фазовые перестройки и критические значения бифуркационного параметра k определены аналитически в соответствии со стандартными асимптотическими методами, изложенными в [4].

3. Численный анализ системы связанных осцилляторов. Возьмем теперь те же значения параметров r_1, r_2, h , при которых был проведен локальный анализ нормальной формы (18), с тем, чтобы при значениях λ , близких к $\lambda_{кр}$, убедиться в наличии у исходной системы (3) аналогичного сценария фазовых перестроек. Пусть $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.6$, $h = 0.1$, тогда $\omega_0 \approx 0.95584$, $\lambda_{кр} \approx 2.59729$. При $\lambda = 2.85$ (при этом $\varepsilon = \lambda - \lambda_{кр} = 0.252711$) численно получаем следующий набор фазовых перестроек:

- при $D > D_{кр}$, где $D_{кр} \approx 0.1254$, устойчив только однородный цикл;
- при $D = D_{кр}$ однородный цикл теряет устойчивость и от него ответвляются два симметричных друг другу устойчивых цикла;
- при $D = D_C$, где $D_C \approx 0.0872$, от циклов ответвляется пара устойчивых торов;
- при $D = D_S$, где $D_S \approx 0.074$, симметричные торы объединяются в один устойчивый самосимметричный тор;
- при $D = D_{\pi 2}$, где $D_{\pi 2} \approx 0.05$, устойчивый самосимметричный тор стягивается в цикл, соответствующий колебаниям в противофазе;
- наконец, при $D < D_{\pi 2}$ устойчивы только колебания в противофазе.

Нетрудно видеть, что данный набор бифуркаций полностью соответствует полученным в предыдущем пункте результатам локального анализа.

Рассмотрим теперь разрушение указанного бифуркационного сценария при увеличении параметра λ . Особенно будем интересоваться ролью запаздывания h . Сразу

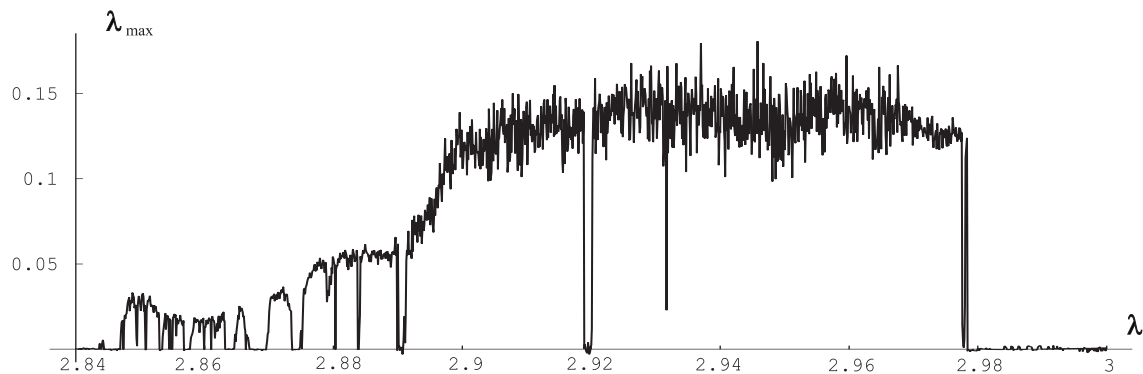


Рис. 2. Зависимость λ_{max} от λ при $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.6$, $D = 0.074$, $h = 0.1$

отметим, что полный качественный анализ, в данном случае, крайне затруднителен, поэтому для оценки характера фазовых перестроек будем вычислять две усредненные характеристики устойчивых режимов системы (3). Первая из этих характеристик — старший ляпуновский показатель λ_{max} , стандартным образом вычисляемый в соответствии с вариантом алгоритма Беннетина, изложенном в [5] и реализованном в [6], а вторая — величина $u_{max} = \sup_{t>0} \max_{j=1,2} u_j(t)$, представляющая собой максимальное значение компонент решения $u_1(t), u_2(t)$ на аттракторе системы (3). Зафиксируем значения $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.6$, $D = 0.074$ и $h = 0.1$ и будем увеличивать параметр λ от критического значения $\lambda_{кр}$.

На рисунке 2 приведен график зависимости старшего ляпуновского показателя от параметра λ на промежутке от 2.84 до 3. Выбор левой границы обусловлен тем, что при значениях $\lambda_{кр} < \lambda < 2.84$ старший ляпуновский показатель равен нулю и система (3) имеет устойчивый самосимметричный двумерный тор. Нетрудно видеть, что на отображенном на рисунке 2 промежутке изменения λ значение λ_{max} принимает положительные значения, что означает переход к хаотическим колебаниям. Отметим особо окно $2.9189 < \lambda < 2.9201$, в котором значение $\lambda_{max} = 0$. Для этого окна решения системы (3) представляют собой устойчивые циклы. Важно заметить, что размер этого окна быстро убывает с ростом h (см. соответствующий график для $h = 0$ в статье [3]).

На рисунке 3 изображена зависимость u_{max} от λ на аттракторе системы (3). Вычисление величины $u_{max}(\lambda)$ производилось на промежутке от $\lambda = 2.86$ до $\lambda = 3$ с шагом 0.0001. Левая граница изменения параметра λ выбрана в данном случае существенно правее, чем на рисунке 2, поскольку именно на этом промежутке происходят наиболее существенные изменения изучаемой величины. График зависимости $u_{max}(\lambda)$ имеет несколько выраженных скачков, первый из которых происходит при $\lambda \approx 2.8946$ и характеризуют переход от колебаний малой амплитуды, близких к полученным на основе локальной теории, к колебаниям, сочетающим всплески большой амплитуды с относительно малыми колебаниями (см. рис. 4–6). Следующие два скачка функции $u_{max}(\lambda)$ происходят в точках $\lambda \approx 2.919$ и $\lambda \approx 2.9202$ и дают то же самое окно, что и полученное на основе вычисления λ_{max} . Наконец, последний скачок $u_{max}(\lambda)$ происходит в точке $\lambda = 2.9784$. Для того чтобы оценить разницу

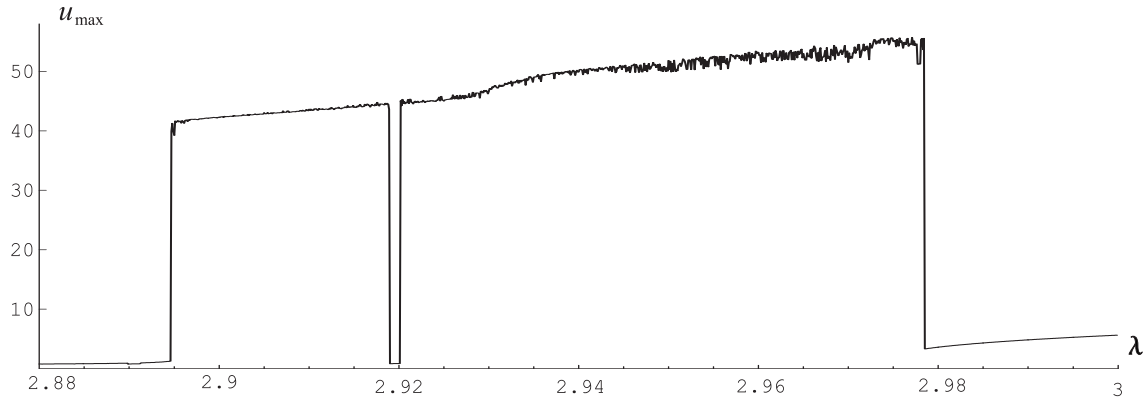


Рис. 3. Зависимость максимальных значений на аттракторе от λ при $r_1 = 1.5$, $r_2 = 2.6$, $D = 0.074$, $h = 0.1$

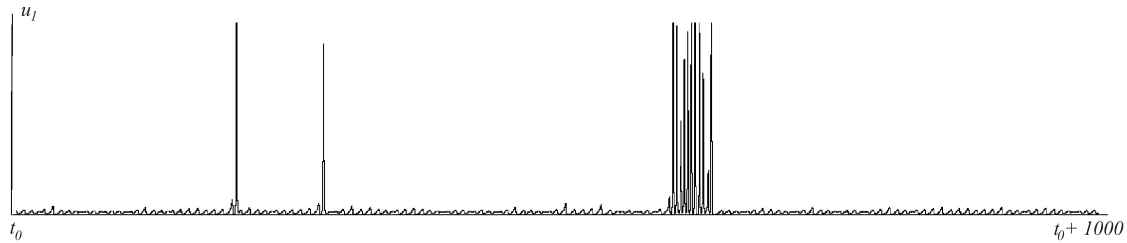


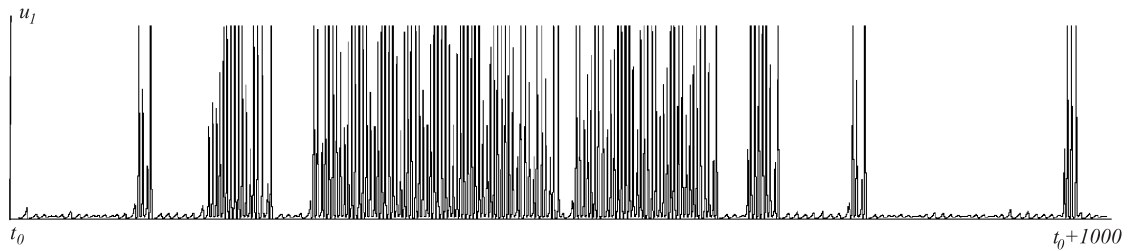
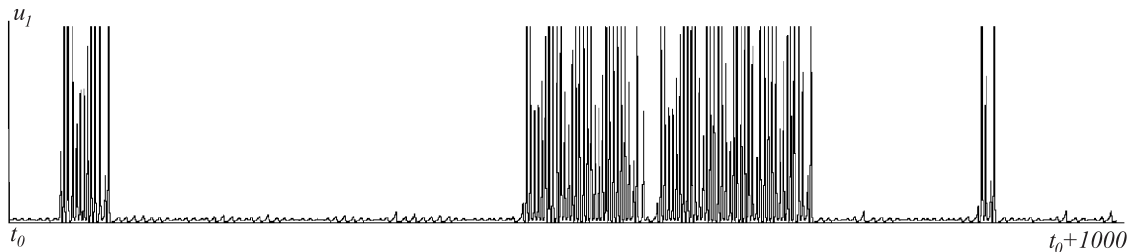
Рис. 4. Зависимость u_1 от t при $\lambda = 2.897$

колебаний большой и малой амплитуды приведем значения $u_{max}(\lambda)$ при пересечении первой точки разрыва $u_{max}(2.8946) \approx 1.2568$ и $u_{max}(2.8947) \approx 39.94$. Нетрудно видеть, что амплитуда колебаний в соседних точках отличается более, чем 30 раз.

При анализе зависимости $\lambda_{max}(\lambda)$ и $u_{max}(\lambda)$, помимо окна, в котором значения обеих функций резко меняются, можно выделить две области с различным поведением решений системы (3). Первой области $\lambda < 2.8946$ соответствуют хаотические колебания малой амплитуды, для второй области от $\lambda > 2.8947$ (за исключением окна) характерны сочетания малой и большой амплитуды с постепенным возрастанием последней, при этом колебания большой амплитуды носят случайный характер. Обратим внимание, что так же, как и при отсутствии запаздывания в цепочке связи между осцилляторами, фазовые портреты при значениях λ из области до окна ($2.8947 < \lambda < 2.9189$) и после окна ($2.9202 < \lambda < 2.9784$) визуально совпадают, хотя их статистические характеристики существенно отличаются.

Для иллюстрации колебаний из области с сочетанием разномасштабных колебаний на рисунках 4, 5 представлены графики зависимости $u_1(t)$ на промежутке изменения t длины 1000 при $\lambda = 2.897$ и различных значениях t_0 . Рисунок 6 соответствует аналогичной зависимости при значении $\lambda = 2.93$.

4. Заключение. Основным результатом введения запаздывания в элемент связи между осцилляторами следует считать возможность борьбы с состояниями мультистабильности, когда сосуществуют режимы с теми или иными признаками син-

Рис. 5. Зависимость u_1 от t при $\lambda = 2.897$ Рис. 6. Зависимость u_1 от t при $\lambda = 2.93$

хронизма (однородные циклы, колебания в противофазе), а также более сложно устроенные колебания.

Подходящий выбор величины запаздывания h позволяет получить область изменения параметра связи D , в которой устойчив лишь режим без синхронизации. В случае, когда работают локальные методы, данный эффект состоит в изменении сценария фазовых перестроек системы (3) и переходе к набору бифуркаций, исключающих сосуществование синхронных и несинхронных режимов. Наиболее интересен, впрочем, случай относительно большого λ вне пределов применимости локальных методов, который рассмотрен численно. В этой ситуации введение запаздывания приводит к сокращению области существования циклов, которые соответствуют в данном случае синхронным колебаниям, и расширению области устойчивости неупорядоченных режимов импульсного характера. В качестве дополнительных новых эффектов, к которым приводит введение запаздывания в цепь связи, нужно отметить, кроме сужения области существования устойчивого цикла, разделяющего области с разномасштабными колебаниями, значительное уменьшение его амплитуды. Наряду с этим при $h > 0$ расширяется область хаотических колебаний, которые возникают при меньших значениях λ . Также следует упомянуть увеличение отношения амплитуд больших и малых колебаний в импульсных пакетах по сравнению со случаем отсутствия запаздывания.

Список литературы

1. *Кащенко С. А., Майоров В. В.* Об одном дифференциально-разностном уравнении, моделирующем импульсную активность нейрона // Математическое моде-

- лирование. 1993. Т. 5, № 12. С. 13–25.
2. Майоров В. В., Мышкин И. Ю. Математическое моделирование нейронов сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2, № 11. С. 64–76.
 3. Глызин С. Д., Киселева Е. О. Динамика взаимодействия пары осцилляторов нейронного типа // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, № 2. С. 75–88.
 4. Глызин С. Д. Сценарии фазовых перестроек одной конечноразностной модели уравнения “реакция-диффузия” // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811.
 5. Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 2. С. 268 – 273.
 6. Глызин, Д. С. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008611464. Пакет программ для анализа динамических систем "Tracer". Заявка № 2008610548 от 14.02.2008 г. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.03.2008 г.

The account of delay in a connecting element between two oscillators

Glyzin S. D., Kiseleva E. O.

Keywords: autooscillations, delay, normal form, Lyapunov's exponents, bifurcations, synchronization

Dynamics of two diffusion coupled close oscillators occurring in nerve cell simulation is considered. The delay of passage the pulse in the connecting element between the oscillators is taken into account. For parameters close to critical values the normal form for amplitude and phase variables is constructed. Phase reconstructions of the normal form when changing the parameters describing connection element are analyzed. It is shown that, the introduction of delay leads to significant changes in the scenario of phase reconstructions.

Сведения об авторах:

Глызин Сергей Дмитриевич,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой компьютерных сетей;

Киселева Екатерина Олеговна,

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, аспирант